POLYNOM

1) Základní pojmy

Polynomem stupně n nazveme funkci tvaru

$$y = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n\,,$$

kde $a_0, a_1, ..., a_n \in R$, $a_0 \neq 0$, $n \in N$. Čísla $a_0, a_1, ..., a_n$ se nazývají **koeficienty polynomu**.

Číslo c nazveme **kořenem polynomu** $P(x)$, je-li $P(c) = 0$ a výraz $(x\text{-}c)$ pak nazýváme **kořenový činitel**.

Vlastnosti polynomů

- Polynom stupně n má právě n kořenů (reálných nebo komplexních).
- Je-li číslo c kořenem polynomu $P_n(x)$, můžeme tento polynom napsat ve tvaru součinu $P_n(x) = (x - c) \cdot Q_{n-1}(x)$, kde $Q_{n-1}(x)$ je vhodný polynom stupně $(n-1)$ (polynom $Q_{n-1}(x)$ budeme v dalším textu nazývat „zbytkový" polynom).
- Má-li polynom $P_n(x)$ kořeny $x_1, x_2, ..., x_n$, lze jej rozložit na součin kořenových činitelů $P_n(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$.

Jsou-li v rozkladu polynomu některé kořeny stejné, mluvíme o vícenásobných kořenech.
Vyskytuje-li se kořen v rozkladu pouze jednou, jde o jednoduchý kořen.
Při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů v reálném oboru se v součinu vyskytují tyto typy činitelů :

$(x - x_i)$ – jde-li o jednoduchý kořen x_i,

$(x - x_j)^k$ – jde-li o k-násobný kořen x_j,

$(ax^2 + bx + c)$ – jde-li o polynom 2. stupně, který má komplexní kořeny ($D = b^2 - 4ac < 0$).

2) Operace s polynomy

Součet, rozdíl a součin polynomů počítáme s využitím pravidel pro počítání s reálnými čísly a vět o mocninách.

Příklad 1: Jsou dány polynomy $P(x) = 2x^4 - 3x^2 - 4x + 5$ a $Q(x) = -2x^2 + x - 1$.

Vypočtěte jejich součet, rozdíl a součin.

a) $P(x) + Q(x) = (2x^4 - 3x^2 - 4x + 5) + (-2x^2 + x - 1) = 2x^4 - 5x^2 - 3 + 4$

b) $P(x) - Q(x) = (2x^4 - 3x^2 - 4x + 5) - (-2x^2 + x - 1) = 2x^4 - x^2 - 5x + 6$

c) $P(x) \cdot Q(x) = (2x^4 - 3x^2 - 4x + 5) \cdot (-2x^2 + x - 1) =$

$$= -4x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 6x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 8x^3 - 4x^2 + 4x - 10x^2 + 5x - 5 =$$

$$= -4x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 9x - 5$$

Dělení polynomů

K libovolným polynomům $P(x)$ a $Q(x)$, kde $Q(x) \neq 0$, existují polynomy $R(x)$ a $T(x)$ tak, že platí $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}$, kde stupeň polynomu $T(x)$ je menší než stupeň polynomu $Q(x)$.

Polynom $T(x)$ se nazývá zbytek po dělení polynomu $P(x)$ polynomem $Q(x)$. V případě, že $T(x) = 0$, jde o dělení beze zbytku.

Příklad 2: Jsou dány polynomy $P(x) = 6x^3 + 13x^2 + 4x - 7$ a $Q(x) = 2x - 1$. Vypočítejte jejich podíl $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Řešení : Při dělení musí být oba polynomy uspořádány sestupně podle klesajících mocnin proměnné. Postup dělení popíšeme ve třech krocích.

1) První člen dělence dělíme prvním členem dělitele (tj. $6x^3 : 2x = 3x^2$). Získaným podílem ($3x^2$) násobíme všechny členy dělitele $(2x - 1)$ (tj. $(2x-1) \cdot 3x^2 = 6x^3 - 3x^2$). Tento dílčí výsledek odečteme od dělence.

Zapíšeme : $(6x^3 + 13x^2 + 4x - 7) : (2x - 1) = 3x^2$

$$\begin{array}{l} -(6x^3 - 3x^2) \\ \hline \qquad 16x^2 + 4x - 7 \end{array}$$

2) Postup opakujeme, a to tak, že prvním členem dělitele dělíme první člen zbytku $\left(16x^2 : 2x = 8x\right)$. Získaným podílem $\left(8x\right)$ opět násobíme dělitele $\left((2x-1)\cdot 8x = 16x^2 - 8x\right)$ a tento další dílčí výsledek odečteme od zbytku

Zapíšeme: $(6x^3 + 13x^2 + 4x - 7) : (2x - 1) = 3x^2 + 8x$

$$\begin{array}{l} -(6x^3 - 3x^2) \\ \hline \qquad 16x^2 + 4x - 7 \\ \qquad -(16x^2 - 8x) \\ \hline \qquad\qquad 12x - 7 \end{array}$$

3) Tento postup opakujeme, dokud není zbytek $\left(-1\right)$ po dělení nižšího stupně než je dělitel $\left(2x-1\right)$.

Zapíšeme: $(6x^3 + 13x^2 + 4x - 7) : (2x - 1) = 3x^2 + 8x + 6 - \dfrac{1}{2x-1}$

$$\begin{array}{l} -(6x^3 - 3x^2) \\ \hline \qquad 16x^2 + 4x - 7 \\ \qquad -(16x^2 - 8x) \\ \hline \qquad\qquad 12x - 7 \\ \qquad\qquad -(12x - 6) \\ \hline \qquad\qquad\qquad -1 \end{array}$$

Dělení má smysl za podmínky, že dělitel je různý od nuly, tj. $x \neq \dfrac{1}{2}$.

O správnosti dělení se můžeme přesvědčit zkouškou. Součin podílu a dělitele se musí rovnat dělenci.

3) Hornerovo schéma

Je to algoritmus, který

a) umožňuje vypočítat hodnotu $P(c)$, tj. hodnotu polynomu $P(x)$ v reálném čísle c, pouze užitím násobení a sčítání

b) je vhodný na hledání celočíselných kořenů polynomu s celočíselnými koeficienty

c) je možné využít na dělení polynomu $P(x)$ polynomem 1. stupně ($x-c$)

d) se používá při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů.

Je-li zadaný polynom $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ a číslo x_0, má Hornerovo schéma tvar tabulky

	a_0	a_1	...	a_n
x_0	$b_0 = a_0$	$b_1 = a_1 + x_0.b_0$	...	$b_n = a_n + x_0.b_{n-1} = P_n(x_0)$

,

kde na prvním řádku jsou koeficienty polynomu a čísla na druhém řádku se počítají pomocí rovnic : $b_0 = a_0$, $b_i = a_i + x_0b_{i-1}$, pro $i = 2,3,...,n$.

Funkční hodnota $P_n(x_0)$ je pak rovna číslu b_n.

Příklad: Určete hodnotu polynomu $P_3(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 2$.

Řešení : Použijeme Hornerovo schéma. Do horního řádku tabulky zapíšeme všechny (pokud by polynom měl i nulové) koeficienty $P_3(x)$

	1	-2	3	-6

Nejdříve budeme počítat $P_3(-1)$, proto do tabulky vlevo zapíšeme (–1), potom sepíšeme první koeficient a dál budeme postupovat podle naznačeného schématu.

	1	-2	3	-6
-1	1	$(-1)\cdot 1 - 2 = -3$	$(-1)\cdot(-3) + 3 = 6$	$(-1)\cdot 6 - 6 = -12$

Poslední hodnota ve druhém řádku je hodnota daného polynomu v bodě $x_1 = -1$, tedy $P_3(-1) = -12$.

Provedeme totéž pro $x_2 = 2$

$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 3 & -6 \\ \hline 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$. Z výpočtu plyne, že $P_3(2) = 0$ a to znamená, že $x_2 = 2$ je kořenem daného polynomu.

Příklad: Vypočtěte $\left(x^5 - 4x^3 + 2x + 1\right) : \left(x - 2\right)$.

Řešení : 1) Zvolíme-li klasické dělení, dostaneme

$$\left(x^5 - 4x^3 + 2x + 1\right) : \left(x - 2\right) = x^4 + 2x^3 + 2 + \frac{5}{x-2} \quad \ldots \; x \neq 2$$

$$\begin{array}{l} -(x^5 - 2x^4) \\ \hline \quad 2x^4 - 4x^3 + 2x + 1 \\ \quad -(2x^4 - 4x^3) \\ \hline \qquad 2x + 1 \\ \qquad -(2x - 4) \\ \hline \qquad\quad 5 \end{array}$$

2) Použijeme-li Hornerovo schéma $\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 0 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{array}$

Víme, že poslední hodnota ve druhém řádku je $P(2) = 5$, což je zbytek po dělení a ostatní čísla jsou koeficienty polynomu, který vznikl po vydělení. Je to polynom 4. stupně tvaru

$1 \cdot x^4 + 2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 2$

Dostáváme tedy stejný výsledek, přitom výpočet byl výrazně kratší.

Závěr: $\left(x^5 - 4x^3 + 2x + 1\right) : \left(x - 2\right) = x^4 + 2x^3 + 2 + \dfrac{5}{x-2} \quad \ldots \; x \neq 2$

Postup při rozkladu polynomu na součin kořenových činitelů

Využíváme vlastnost polynomů, podle které mohou být celočíselnými kořeny polynomu $P_n(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, který má koeficient $a_0 = 1$, pouze dělitelé absolutního členu a_n. Budeme počítat pro tyto dělitele dokud nenarazíme na kořen. Koeficienty na tomto řádku Hornerova schématu nám současně vyjádří „zbytkový“ polynom $Q_{n-1}(x)$ (viz vlastnosti polynomů) z rovnosti $P_n(x) = (x - c) \cdot Q_{n-1}(x)$. Protože nalezený kořen c může být vícenásobný, je třeba postup zopakovat pro polynom $Q_{n-1}(x)$ a pak i další „zbytkové“ polynomy nižších stupňů, dokud je číslo c jejich kořenem. V opačném případě počítáme Hornerovo schéma pro dalšího dělitele absolutního členu a_n. Tak postupujeme, dokud „zbytkový“ polynom není 2. stupně. Kořeny tohoto polynomu určíme pomocí vzorce pro výpočet kořenů kvadratické rovnice.

Příklad: Určete celočíselné kořeny polynomu $P(x)=x^5+9x^4+26x^3+20x^2-24x-32$ a napište rozklad tohoto polynomu na součin kořenových činitelů v $\boldsymbol{R}$.

Řešení : Celočíselnými kořeny daného polynomu mohou být dělitelé čísla $a_n=-32$, tedy čísla : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32$.

Pomocí Hornerova schématu budeme zjišťovat, zda některé z nich je skutečně kořenem. Postupujeme obvykle od menších čísel k větším :

	1	9	26	20	-24	-32	
1	1	10	36	56	32	0	tedy číslo 1 je kořenem
1	1	11	47	103	$135 \neq 0$		

Z tabulky vyplývá, že číslo 1 je jednoduchým kořenem a polynom lze rozložit na součin
$x^5+9x^4+26x^3+20x^2-24x-32=(x-1)\cdot\left(x^4+10x^3+36x^2+56x+32\right)$.

Dál budeme hledat kořeny polynomu $x^4+10x^3+36x^2+56x+32$, přičemž víme, že číslo 1 už to být nemůže. Dalšími možnými kořeny jsou zbývající celočíselní dělitelé čísla –32.

	1	10	36	56	32
-1	1	9	27	29	$3 \neq 0$
2	1	12	60	176	$384 \neq 0$
-2	1	8	20	16	0

Dalším kořenem je tedy číslo –2 a daný polynom lze psát ve tvaru součinu :
$x^5+9x^4+26x^3+20x^2-24x-32 = (x-1)\cdot(x+2)\cdot\left(x^3+8x^2+20x+16\right)$.

Dále hledáme kořeny polynomu $x^3+8x^2+20x+16$. Možnými kořeny jsou opět celočíselní dělitelé čísla 16 : $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16$. Čísla $\pm 1, 2$ už nemohou být kořeny, u čísla –2 je nutno prověřit, zda není kořenem vícenásobným :

	1	8	20	16
-2	1	6	8	0

Tedy číslo -2 je alespoň dvojnásobným kořenem.

Polynom $x^2 + 6x + 8$ již rozložíme pomocí kořenů kvadratické rovnice. Vzhledem k tomu, že jsou to čísla –2, –4, je rozklad $(x+2)(x+4)$. Tedy celkem můžeme daný polynom vyjádřit ve tvaru součinu kořenových činitelů :

$$P(x) = x^5 + 9x^4 + 26x^3 + 20x^2 - 24x - 32 = (x-1)\cdot(x+2)^3\cdot(x+4).$$

RACIONÁLNÍ LOMENÁ FUNKCE (RLF)

Je to funkce tvaru $y = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, kde $P_n(x), Q_m(x)$ jsou nesoudělné polynomy, $Q_m(x) \neq 0$.

Je-li $n < m$, nazývá se **ryzí**, je-li $n \geq m$, nazývá se **neryzí.**

Každá neryze lomená racionální funkce se dá dělením rozložit na součet polynomu a funkce ryze lomené.

Poznámka: Každá ryze lomená racionální funkce se dá rozložit na součet tzv. parciálních zlomků (není-li už sama parciálním zlomkem).

Příklad: Vyjádřete racionální lomenou funkci $f(x) = \dfrac{x^4 + 8x^2 + 16}{x^2 + 4x - 5}$ jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce.

Řešení : Funkce $f(x) = \dfrac{x^4 + 8x^2 + 16}{x^2 + 4x - 5}$ je definována pokud je jmenovatel zlomku nenulový.

Tedy pro $x \in \mathrm{R} - \{-5, 1\}$.

Dělením polynomů $(x^4 + 8x^2 + 16) : (x^2 + 4x - 5)$ dostaneme polynom $P(x) = x^2 - 4x + 29$ a funkci $G(x) = -136x + 161$, jako zbytek po dělení.

Zadanou funkci můžeme tedy vyjádřit jako součet polynomu a ryze lomené racionální funkce ve tvaru $f(x) = x^2 - 4x + 29 + \dfrac{-136x + 161}{x^2 + 4x - 5}$.

Poznámka: Pozor na znaménka ve zbytku, pokud vytknete mínus před zlomek, bude

$f(x) = x^2 - 4x + 29 - \dfrac{136x - 161}{x^2 + 4x - 5}$.